

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ИРКУТСКОЙ ОБЛАСТИ
«ТУЛУНСКИЙ АГРАРНЫЙ ТЕХНИКУМ»**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

по дисциплине

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

для специальности

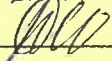
09.02.04. Информационные системы (по отраслям)

г. Тулун
2021 г.

Рассмотрено и одобрено на
заседании предметно-цикловой
комиссии общеобразовательных
дисциплин

Протокол № 8
от « 15 » 04 2021г

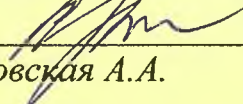
Председатель ПЦК № 2


Филимонова Г.В.

Утверждено на заседании
методического совета ГБПОУ
«Тулунский аграрный техникум»
Протокол № 10

от « 11 » 05 2021г

Председатель МС


Арциховская А.А.

Учебное пособие разработано на основе Федеральных государственных образовательных стандартов (далее – ФГОС) по специальности среднего профессионального образования (далее СПО) **09.02.04. Информационные системы (по отраслям)**

Организация-разработчик: ГБПОУ «Тулунский аграрный техникум»

Разработчик: Арциховская Анна Анатольевна

Пояснительная записка

Учебное пособие составлено в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Численные методы» для студентов специальности 09.02.04. Информационные системы (по отраслям) очной и заочной форм обучения. В учебном пособии содержатся 10 практических работ, позволяющих совершенствовать умения и навыки по всем темам дисциплины, а так же проверить их.

Каждая практическая работа состоит из общего задания, которое требует решения задачи с помощью микрокалькулятора, а затем с помощью инструментального прикладного пакета Maple или в среде Excel, и конкретных данных, которые представлены в двадцати вариантах, что обеспечивает самостоятельность студентов при выполнении работы. Ко всем практическим работам даны рекомендации по их выполнению, они представлены в виде блок-схем, таблиц, алгоритмов, которые были разработаны на основе опыта преподавания дисциплины в течении десяти лет. Такой вид инструкций облегчает восприятие характера и содержание деятельности, кроме того способствует развитию алгоритмического мышления и позволяет строить решения задач с помощью других инструментальных средств и на разных языках программирования.

Структура пособия позволяет легко размножать отдельные практические работы или указания к ним.

Это учебное пособие является частью УМК и должно использоваться параллельно с курсом лекций по данной дисциплине.

Содержание

Пояснительная записка.....	2
П. р. № 1 Приближённые вычисления	4
Рекомендации к п.р.№ 1.....	5
П. р. № 2 «Решение трансцендентных уравнений методом дихотомии».....	6
Рекомендации к п.р.№ 2.....	7
П. р. № 3 «Решение алгебраических уравнений методами Ньютона»..	8
Рекомендации к п.р.№ 3.....	9
П. р. № 4 «Решение систем линейных алгебраических уравнений».....	10
Рекомендации к п.р.№ 4.....	12
П. р. №5 «Полином Лагранжа».....	14
Рекомендации к п.р.№ 5.....	15
П. р. № 6 «Интерполяция сплайнами».....	16
Рекомендации к п.р.№ 6.....	17
П. р. № 7 «Численное интегрирование».....	18
Рекомендации к п.р.№ 7.....	19
П. р. №8 «Решение дифференциальных уравнений».....	20
Рекомендации к п.р.№ 8.....	21
П. р. № 9 «Оптимизация функции одной переменной».....	22
Рекомендации к п.р.№ 9.....	23
П. р. № 10 «Оптимизация функции двух переменных».....	24
Рекомендации к п.р.№ 10.....	25
Прикладной программный пакет Maple.....	26
Решение задач оптимизации в Excel.....	27
Рекомендации по применению инструментальных средств для численного решения задач.....	29
Литература.....	31

Практические работа № 1

«Приближённые вычисления»

1. Округлить (симметричное округление) точное число A до трёх значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности полученных приближённых чисел.
2. Определить количество верных знаков в числе x , если известна его предельная относительная погрешность δ
3. Найти сумму приближённых чисел a, b, c , считая в них все знаки верными. Определить абсолютную и относительную погрешность суммы.
4. Найти предельную абсолютную и относительную погрешности при вычислении произведения чисел e, k
5. Привести пример потери точности при вычитании двух близких чисел.

вариант	A	x	δ	a	b	c	e	k
1	2,1514	1.9821	0.01	3.4	6.22	0.149	0.12	8.1234
2	0,16152	0.2218	0.02	4.05	6.723	0.03254	3.6	5.09813
3	0,01204	22.351	0.001	0.7219	135.347	0.013	7.31	1.54321
4	1,2251	0.024225	0.005	3.672	4.63	0.0278	1.23457	0.98
5	0,001528	0.000135	0.15	1.24734	0.346	0.051	4.35	4.11112
6	392,85	6.3598	0.001	11.7	0.0937	5.081	0.90751	3.21
7	0,1545	0.11452	0.1	1.75	1.21	0.041	3.12345	0.45
8	0,03923	48361	0.01	18.0354	3.7251	0.071	4.12098	0.76
9	3,9876	592.8	0.02	0.113	0.1056	89.4	2.76	6.10101
10	0,02349	14.9360	0.01	0.317	3.27	4.7561	4.23413	9.03
11	2,0934	17.83	0.01	0.0399	4.83	0.072	4.1265	0.98
12	3,2143	3.175	0.1	1.574	1.40	1.1236	9.45	2.17651
13	3,10056	0.1217	0.01	12.72	0.34	0.0290	6.32456	7.03
14	0,2345	2.8912	0.01	3.49	0.854	0.0037	3.81	3.1209
15	0,09541	0.1822.	0.02	0.0976	2.371	1.15874	4.12341	6.1
16	1,12365	35.221	0.001	82.3574	34.1	7.00493	23.4	4.26912
17	2,56741	0.022425	0.005	0.11587	4.25	3.00971	4.671111	3.24
18	13,7654	0.000135	0.15	3.71452	3.03	0.765	5.12654	8.23
19	0,09876	5.6389	0.001	7.345	0.31	0.09872	4.091111	3.567
20	0,12076	0.54112	0.1	0.038	3.9353	5.75	6.13	6.23451
21	0,007685	16384	0.01	0.5432	3.6	9.234	5.09	33.1232
22	23,1876	285.9	0.02	1.234	0.9	6.45678	2.987651	3.675
23	2,4531	83.17	0.01	5.34	3.45309	9.457	2.06	3.09876
24	0,43098	7.513	0.01	4.321	4.6	9.01234	4.21	3.765432
25	4,12948	0.1712	0.1	0.98765	2.4563	8.12	2.761923	3.09

Рекомендации по выполнению практической работы № 1 «Приближённые вычисления»

Симметричное округление. Чтобы округлить число до m значащих цифр, отбрасывают все его цифры, стоящие справа от m -ой его цифры. При этом если первая из отбрасываемых цифр превышает или равна 5, но среди последующих есть ненулевые, последняя из оставшихся значащих увеличивается на единицу.

Абсолютная и относительная погрешности Пусть a - приближенное значение числа A . Величина $|a - A|$ называется абсолютной погрешностью приближенного числа. Малое число $\Delta > 0$ такое, что $|a - A| < \Delta$, то Δ назовем предельной абсолютной погрешностью, при неизвестном A приходится использовать деление на $|a|$, если $|\Delta| \ll |a|$.

Значащие цифры и верные знаки Любое число можно представить в виде $a = \pm(a_1 q^n + a_2 q^{n-1} + \dots + a_m q^{n-m+1} + \dots)$, $a_1 \neq 0$. Все присутствующие здесь цифры являются значащими. Цифру a_m называют *верной*, если для абсолютной погрешности числа имеет место неравенство $\Delta \leq \Theta \cdot q^{n-m+1}$, где $0.5 \leq \Theta \leq 1$, и в противном случае - *сомнительной*. Θ берут равным 0.5. Если число имеет m верных десятичных знаков, то его относительная погрешность $\delta = \Delta/a \approx \Theta \cdot q^{n-m+1} / a_1 q^n$ не превышает $10^{-(m-1)}$, деленное на первую его значащую цифру. При $m > 1$ эта величина может быть взята вдвое меньшей

Погрешности элементарных операций

Сложение и вычитание Практика вычислений предлагает для обеспечения результата с заданным числом верных значащих цифр проводить промежуточные вычисления с количеством значащих цифр, на одну или две большим заданного.

Если числа с разной абсолютной погрешностью выбирается операнд с максимальной погрешностью и остальные округляются с сохранением лишнего знака.

Полная абсолютная погрешность здесь сложится из

1. суммы погрешностей исходных данных
2. абсолютной величины погрешности округления операндов
3. погрешности округления результата

Относительная погрешность произведения и частного не превышает суммы относительных погрешностей операндов, абсолютная же погрешность зависит от значений самих операндов и при делении, например, на число, близкое к нулю, может оказаться большой. Очевидно, что и при этих операциях нет смысла сохранять точность операндов большую, чем точность наименее точного.

Практическая работа № 2

«Решение трансцендентных уравнений методом дихотомии»

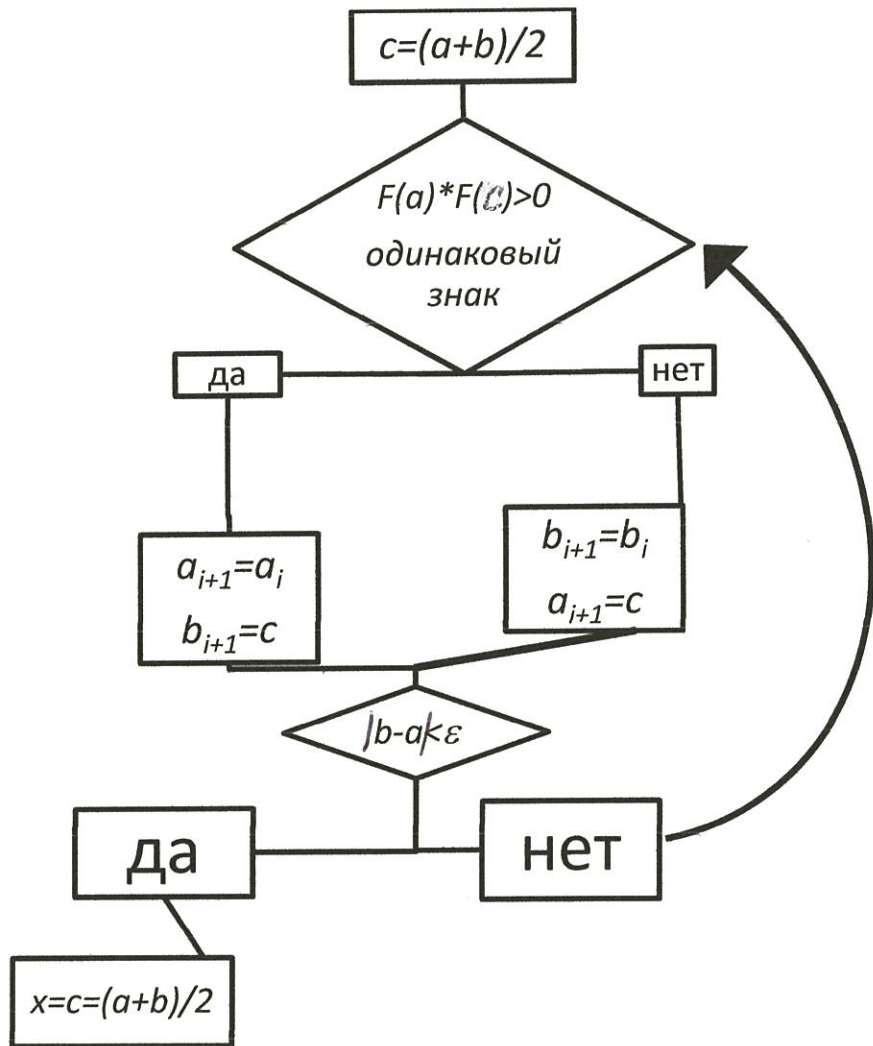
1. Выполнить отделение корней уравнения, построив схематически график в тетради.
2. Вычислить корень уравнения методом дихотомии, с точностью $\xi = 0,01$ используя микрокалькулятор и занося результаты в таблицу.
3. Выполнить отделение корней уравнения графическим методом с помощью системы Maple
4. Вычислить корень уравнения с точностью $\xi = 10^{-6}$ с помощью системы Maple
5. Используя блок-схему к любому из численных методов решения уравнений составить программу для ЭВМ

Вариант г	Уравнение	Примечания	Вариант г	Уравнение	Примечания
1	$(0,2)^3 = \cos x$	-	11	$2\lg(x+7) - 5\sin x = 0$	-
2	$x - 10\sin x = 0$	-	12	$4\cos x + 0,3x = 0$	-
3	$2^x - 2\cos x = 0$	При $x \geq 10$	13	$5\sin 2x = \sqrt{1-x}$	-
4	$\lg(x+5) = \cos x$	При $x \geq 5$	14	$2x^2 - 5 = 2^x$	-
5	$\sqrt{4x+7} = 3\cos x$	-	15	$2x^{-2} = 10 - 0,5x^2$	-
6	$x \sin x - 1 = 0$	-	16	$4x^2 - 6,2 = \cos 0,6x$	-
7	$8\cos x - x = 6$	-	17	$3\sin 8x = 0,7x - 0,9$	$x \in (-2; 2)$
8	$\sin x - 0,2x = 0$	-	18	$1,2 - \ln x = 4\cos 2x$	-
9	$10\cos x - 0,1x^2 = 0$	-	19	$\ln(x+6,1) = 2\sin(x+1,4)$	-
10	$2^{-x} = \sin x$	При $x \leq 10$	20	$x^2 - 3,2x = 1$	-

Рекомендации по выполнению практической работы № 2
 «Решение трансцендентных уравнений методом дихотомии»

Дано $F(x)=0$, (a, b) , ε

Порядок вычислений указан на схеме, данные заносить в расчётную таблицу.



шаг	a	b	$c=(a+b)/2$	$F(a)$	$F(c)$	$ b-a < \varepsilon$
1						
2						
...						

Практическая работа № 3

«Решение алгебраических уравнений методами Ньютона»

1. Вычислить корень уравнения № 1 на данном промежутке методом касательных с $\xi = 0,0001$
2. Вычислить корень уравнения № 2 на данном промежутке методом хорд с точностью $0,0001$
3. Вычислить корень уравнения с точностью $\xi = 10^{-6}$ с помощью системы Maple

вариант	Уравнение №1		Уравнение №2	
1	$2x^3 - 2x^2 + 5x - 6 = 0$	(1;2)	$-x^4 + x^3 - x^2 = 0$	(-1;0)
2	$4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$	(-1;0)	$-x^5 + 4x^2 + 5 = 0$	(1;2)
3	$x^4 - 2x^2 + 2x - 3 = 0$	(1;2)	$x^5 - x^2 + 5 = 0$	(-2;-1)
4	$x^4 - 2x^2 - x - 8 = 0$	(2;3)	$-x^4 + 2x^3 + 1 = 0$	(-1;0)
5	$-x^4 - 2x^2 + x + 3 = 0$	(-1;0)	$2x^4 + 3x^3 - 1 = 0$	(0;1)
6	$-x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$	(-2;-1)	$-x^5 + x^4 - x^3 + 2 = 0$	(1;2)
7	$6x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$	(1;2)	$2x^4 + x - 3 = 0$	(-2;-1)
8	$-x^4 - 2x^2 + x + 5 = 0$	(-2;-1)	$x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 1 = 0$	(0;1)
9	$-x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$	(0;1)	$2x^4 + 3x^3 - 1 = 0$	(-2;-1)
10	$x^5 + x^3 - 4 = 0$	(1;2)	$-x^5 + x^3 - 1 = 0$	(-2;-1)
11	$-x^4 + x^3 - x^2 = 0$	(-1;0)	$2x^3 - 2x^2 + 5x - 6 = 0$	(1;2)
12	$-x^5 + 4x^2 + 5 = 0$	(1;2)	$4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$	(-1;0)
13	$x^5 - x^2 + 5 = 0$	(-2;-1)	$x^4 - 2x^2 + 2x - 3 = 0$	(1;2)
14	$-x^4 + 2x^3 + 1 = 0$	(-1;0)	$x^4 - 2x^2 - x - 8 = 0$	(2;3)
15	$2x^4 + 3x^3 - 1 = 0$	(0;1)	$-x^4 - 2x^2 + x + 3 = 0$	(-1;0)
16	$-x^5 + x^4 - x^3 + 2 = 0$	(1;2)	$-x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$	(-2;-1)
17	$2x^4 + x - 3 = 0$	(-2;-1)	$6x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$	(1;2)
18	$x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 1 = 0$	(0;1)	$-x^4 - 2x^2 + x + 5 = 0$	(-2;-1)
19	$2x^4 + 3x^3 - 1 = 0$	(-2;-1)	$-x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$	(0;1)
20	$-x^5 + x^3 - 1 = 0$	(-2;-1)	$x^5 + x^3 - 4 = 0$	(1;2)

Практическая работа №4

«Решение системы линейных алгебраических уравнений»

Коэффициенты системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными записаны в таблице

1. Решить систему, используя схему единственного деления и заносить результаты в таблицу. Вычислить погрешности.

2. Решить систему, используя инструментальный пакет Maple с точностью 0,0001.

Вариант	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
1	0.21	-0.45	-0.2	1.91
	0.3	0.25	0.43	0.32
	0.6	-0.35	-0.25	1.83
2	-3	0.5	0.5	-56.5
	0.5	-0.6	0.5	-100
	0.5	-3	0.5	-210
3	0.45	-0.94	-0.15	-0.15
	-0.01	0.34	0.06	0.31
	-0.35	0.05	0.63	0.37
4	0.63	0.05	0.15	0.34
	0.15	0.1	0.71	0.42
	0.03	0.34	0.1	0.32
5	-0.2	1.6	-0.1	0.3
	-0.3	0.1	-1.5	0.4
	1.2	0.2	0.3	-0.6
6	0.3	1.2	0.2	-0.6
	-0.1	-0.2	1.6	0.3
	0.05	0.34	0.1	0.32
7	0.2	0.44	0.81	0.74
	0.58	0.29	0.05	0.02
	0.05	0.34	0.1	0.32
8	6.36	11.75	10	-41.4
	7.42	19.03	11.75	-49.49
	5.77	7.48	6.36	-27.67
9	-9.11	1.02	-0.73	-1.25
	7.61	6.25	-2.32	2.33
	-4.64	1.13	-8.88	-3.75
10	-9.11	-1.06	-0.67	-1.56
	7.61	6.35	-2.42	2.33
	-4.64	1.23	-8.88	-3.57
11	1.02	-0.73	-9.11	-1.25
	6.25	-2.32	7.62	2.33
	1.13	-8.88	4.64	3.57
12	0.06	0.92	0.03	-0.82
	0.99	0.01	0.07	0.66
	1.01	0.02	0.99	-0.98
13	0.01,	-0.07,	-0.96	-2.04
	0.04,	-0.99,	-0.85	-3.73
	0.91	1.04	0.19	-1.67

14	0.62	0.81	0.77	-8.18
	0.03,	-1.11,	-1.08	0.08
	0.97	0.02	-1.08	0.06
15	0.63	-0.37	1.76	-9.29
	0.9	0.99	0.05	0.12
	0.13	-0.95	0.69	0.69
16	0.98	0.88	-0.24	1.36
	0.16	-0.44	-0.88	-1.27
	9.74	-10.0	1.71	-5.31
17	0.21	-0.94	-0.94	-0.25
	0.98	-0.19	0.93	0.23
	0.87	0.87	-0.14	0.33
18	3.43	4.07	-106.0	46.8
	74.4	1.84	-1.85	-26.5
	3.34	94.3	1.02	92.3
19	0.66	0.44	0.22	-0.58
	1.54	0.74	1.54	-0.32
	1.42	1.42	0.86	0.83
20	0.78	-0.02	-0.12	0.56
	0.02	-0.86	0.04	0.77
	0.12	0.44	-0.72	1.01

Указания к выполнению
практической работы № 4
«Решение СЛАУ по схеме единственного деления»

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Решение записывать в таблицу

№	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i	Σ	S
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1	Σ_1	
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2	Σ_2	
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3	Σ_3	
4	a_{11}/a_{11}	a_{12}/a_{11}	a_{13}/a_{11}	b_1/a_{11}	Σ_1/a_{11}	
5	$1*(-a_{21})+a_{21}$	$a_{12}/a_{11}*(-a_{31})+a_{22}$	$a_{13}/a_{11}*(-a_{31})+a_{23}$	$b_1/a_{11}*(-a_{31})+b_2$	$\Sigma_1/a_{11}*(-a_{31})+\Sigma_2$	
6	$1*(-a_{31})+a_{31}$	$a_{12}/a_{11}*(-a_{21})+a_{32}$	$a_{13}/a_{11}*(-a_{21})+a_{33}$	$b_1/a_{11}*(-a_{21})+b_3$	$\Sigma_1/a_{11}*(-a_{21})+\Sigma_3$	
7	$0/a_{52}=0$	$a_{52}/a_{52}=1$	a_{53}/a_{52}	a_{54}/a_{52}	a_{55}/a_{52}	
8	$0*(-a_{62})=0$	$1*(-a_{62})+a_{62}=0$	$a_{53}/a_{52}*(-a_{62})+a_{63}$	$a_{53}/a_{52}*(-a_{62})+a_{64}$	$a_{53}/a_{52}*(-a_{62})+a_{65}$	
9	0	0	$a_{83}/a_{83}=1$	a_{84}/a_{83}	a_{85}/a_{83}	
10			$x_3 = a_{94}$			
11		$x_2 = a_{74} - a_{73} * x_3$				
12	$x_1 = a_{44} - a_{42} * x_2 - a_{43} * x_3$					

Алгоритм заполнения таблицы

1. Внести коэффициенты системы в строки 1-3
2. Вычислить сумму по строкам, записать в столбец Σ

Прямой ход

3. Разделить числа первой строки на a_{11} , записать в строку 4
4. Числа строки 4 умножить на $(-a_{21})$ и сложить с соответствующими числами строки 2, результат записать в строку 5
5. Числа строки 4 умножить на $(-a_{31})$ и сложить с соответствующими числами строки 3, результат записать в строку 6
6. Числа строки 5 разделить на a_{52} , записать в строку 7
7. Числа строки 7 умножить на $(-a_{62})$ и сложить с соответствующими числами строки 6, результат записать в строку 8
8. Числа строки 8 разделить на a_{83} , записать в строку 9

Проверка прямого хода

Сложить числа по строкам 5-9, результат записать в последний столбец, $\Sigma \approx S$

Обратный ход

9. Найдём $x_3 = a_{94}$

Практическая работа № 5

«Интерполяционный полином Лагранжа»

1. По данной таблице значений составить формулу интерполяционного полинома Лагранжа
2. Выполнить задание № 1 с помощью программы Maple
3. Построить график интерполяционного полинома Лагранжа с помощью Maple
4. Вычислить значение данной функции в точке x , используя расчётную таблицу
5. Выполнить задание № 4 с помощью программы Maple

Вариант	X_0	X_1	X_2	X_3	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	x
1	-1	0	3	4	-3	5	2	-6	1.2
2	2	3	5	6	4	1	7	2	3.1
3	0	2	3	5	-1	-4	2	-8	1.2
4	7	9	13	15	2	-2	3	-4	4.5
5	-3	-1	3	5	7	-1	4	-6	1.6
6	1	2	4	7	-3	-7	2	8	2.3
7	-1	-1	2	4	4	9	1	6	1.6
8	2	4	5	7	9	-3	6	-2	2.1
9	-4	-2	0	3	2	8	5	10	1.8
10	-1	1.5	3	5	4	-7	1	-8	2.2
11	2	4	7	8	-1	-6	3	12	2.5
12	-9	-7	-4	-1	3	-3	4	-9	-3.1
13	0	1	4	6	7	-1	8	2	1.9
14	-8	-5	0	2	9	-2	4	6	1.4
15	-7	-5	-4	-1	4	-4	5	10	-3.1
16	1	4	9	11	-2	9	3	-7	2.6
17	7	8	10	13	6	-2	7	-10	9.1
18	-4	0	2	5	4	8	-2	-9	1.3
19	-3	-1	1	3	11	-1	6	-2	2.4
20	0	3	8	11	1	5	-4	-8	4.1

Указания к выполнению
практической работы № 5

«Полином Лагранжа»

1.)Найдём полином Лагранжа . Дано $x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3$

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^n y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \sum_{i=1}^n y_i \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Формула полинома Лагранжа для функции, заданной четырьмя значениями

$$\text{имеет вид } L_3(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} +$$

$$y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

1. Подставить вместо $x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3$ числа

2. В числителях дробей раскрыть скобки и привести подобные слагаемые

3. В знаменателях дробей вычислить

4. Привести дроби к общему знаменателю.

5. Привести подобные слагаемые в числителе

6. Записать выражение в виде $L_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

2.) Вычисления по формуле Лагранжа. Дано $x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3, x$

$x=$	x_0	x_1	x_2	x_3	P_i	y_i	y_i/P_i
x_0	$x-x_0$	x_0-x_1	x_0-x_2	x_0-x_3	Произведения по строкам	y_0	
x_1	x_0-x_1	$x-x_1$	x_1-x_2	x_1-x_3		y_1	
x_2	x_0-x_2	x_2-x_1	$x-x_2$	x_2-x_3		y_2	
x_3	x_0-x_3	x_3-x_1	x_3-x_2	$x-x_3$		y_3	
							$S = \sum y_i / P_i$

$$f(x) = S (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

Практическая работа № 6

«Интерполяция сплайнами»

1. Для функции, заданной таблицей вычислить коэффициенты и составить формулы кубического сплайна.

2. Выполнить задание № 1 с помощью программы Maple

3. Построить график кубического сплайна с помощью программы Maple, отметить на нём узловые точки.

Вариант	X_0	X_1	X_2	X_3	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3
1	-1	0	3	4	-3	5	2	-6
2	2	3	5	6	4	1	7	2
3	0	2	3	5	-1	-4	2	-8
4	7	9	13	15	2	-2	3	-4
5	-3	-1	3	5	7	-1	4	-6
6	1	2	4	7	-3	-7	2	8
7	-1	-1	2	4	4	9	1	6
8	2	4	5	7	9	-3	6	-2
9	-4	-2	0	3	2	8	5	10
10	-1	1.5	3	5	4	-7	1	-8
11	2	4	7	8	-1	-6	3	12
12	-9	-7	-4	-1	3	-3	4	-9
13	0	1	4	6	7	-1	8	2
14	-8	-5	0	2	9	-2	4	6
15	-7	-5	-4	-1	4	-4	5	10
16	1	4	9	11	-2	9	3	-7
17	7	8	10	13	6	-2	7	-10
18	-4	0	2	5	4	8	-2	-9
19	-3	-1	1	3	11	-1	6	-2
20	0	3	8	11	1	5	-4	-8

Указания к выполнению
практической работы № 6
«Интерполяция сплайнами»

Дано $x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3$

Промежуточные результаты заносим в таблицу

i	a	b	c	d	h
0					
1					
2					
3					
.....					

1. Записать сплайны в общем виде для $i=1, 2, \dots, n-1$ по формуле

$$P_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$$

2. Найдём $a_i = y_i$

3. Найдём $h_i = x_i - x_{i-1}$

4. Найдём c_i используя формулу

$$h_{i+1} c_{i+1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_i c_{i-1} = 3((y_{i+1} - y_i)/h_{i+1} - (y_i - y_{i-1})/h_i)$$

учитывая, что $c_0 = c_n = 0$

тогда, для $i=1$

$$h_2 c_2 + 2(h_1 + h_2)c_1 + h_1 c_0 = 3((y_2 - y_1)/h_2 - (y_1 - y_0)/h_1)$$

для $i=2$

$$h_3 c_3 + 2(h_2 + h_3)c_2 + h_2 c_1 = 3((y_3 - y_2)/h_3 - (y_2 - y_1)/h_2)$$

и т.д. до $i=n-1$

Решая систему из полученных уравнений найдём c_1, c_2, \dots

5. Найдём $d_i = (c_i - c_{i-1})/3 h_i$

6. Найдём $b_i = (y_i - y_{i-1})/h_i + h_i c_i - h_i^2 d_i$

7. Подставим в формулы $P_i(x)$ найденные значения $a_{1,2,3}, b_{1,2,3}, c_{1,2,3}, d_{1,2,3}, i$

Практическая работа № 7

«Численное интегрирование»

Вычислить интеграл данной функции на промежутке (a, b) разделив промежуток интегрирования на 10 частей

1. Вычислить интеграл по формуле прямоугольников
2. Вычислить интеграл по формуле трапеций
3. Вычислить интеграл по формуле Симпсона
4. Вычислить интеграл с помощью программы Maple

Вариант	$f(x)$	a	b
1	$0,37e^{\sin x}$	0	1
2	$0,5 + x \lg x$	1	2
3	$(x + 1,9) \sin(x/3)$	1	2
4	$\frac{1}{x} \ln(x + 2)$	2	3
5	$\frac{3 \cos x}{2x + 1,7}$	0	1
6	$(2x + 0,6) \cos(x/2)$	1	2
7	$2,6x^2 \ln x$	1,2	2,2
8	$(x^2 + 1) \sin(x - 0,5)$	0,5	1,5
9	$x^2 \cos(x/4)$	2	3
10	$\frac{\sin(0,2x - 3)}{x^2 + 1}$	3	4
11	$3x + \ln x$	1	2
12	$4xe^{x^2}$	-1	0
13	$3x^2 + \operatorname{tg} x$	-0,5	0,5
14	$\frac{3x^2 + \sin x}{x^2}$	0	1
15	$3xe^{\cos x}$	0,2	1,2
16	$x^2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$	1,5	2,5
17	$\sqrt{x} e^{-x}$	0,1	1,1
18	$3,1x \ln^2 x$	1,4	2,4
19	$(x - 0,8) \ln \frac{x}{2}$	2,3	3,3
20	$(x - 3,1) e^{\lg x}$	0	1

Указания к выполнению
практической работы № 7
«Численное интегрирование»

Дано функция $y=f(x)$, промежуток (a, b) , шаг h

- 1.) Для применения формул трапеций и Симпсона произвести вычисления по таблице, затем подставить данные в соответствующие формулы.

i	x_i	$y_i=f(x_i)$
0	a	
1	$a+h$	
2	$a+2h$	
3	$a+3h$	
....		
...		
n	b	

Формула трапеций

$$\int_a^b f(x)dx = h \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

для $n=10$

$$\int_a^b f(x)dx = h \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6) + f(x_7) + f(x_8) + f(x_9) + \frac{f(x_{10})}{2} \right)$$

Формула Симпсона для $n=10$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{2}{3} h \left(\frac{f(x_0)}{2} + 2f(x_1) + f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4) + 2f(x_5) + f(x_6) + 2f(x_7) + f(x_8) + 2f(x_9) + \frac{f(x_{10})}{2} \right)$$

- 2) Для применения формулы Гаусса использовать таблицу

i	x_i	$c_i = x_i + \frac{h}{2} + \frac{h}{2\sqrt{3}}$	$d_i = x_i + \frac{h}{2} - \frac{h}{2\sqrt{3}}$	$f(c_i)$	$f(d_i)$	$f(c_i) + f(d_i)$
0	a					
1	$a+h$					
2	$a+2h$					
3	$a+3h$					
....						
...						
n	b					

Тогда формулу Гаусса можно записать в виде

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(c_i) + f(d_i))$$

Практическая работа № 8

«Численное решение дифференциальных уравнений»

Решить дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ на отрезке (a, b) при условии $f(a) = c$

1. Методом Эйлера и построить ломаную Эйлера
2. Методом Рунге-Кутты
3. С помощью программы Maple
4. Построить график с помощью программы Maple

Вариант	$y = f(x, y)$	a	b	c	h
1	$xy^3 - x^2$	4	5	0.7	0.1
2	$\sqrt{4x^2 + 1} - 3y^2$	2.6	4.6	1.8	0.2
3	$\cos(1.5x - y^2) - 1.3$	-1	1	0.2	0.2
4	$x^2 + xy + y^2$	2	3	1.2	0.1
5	$e^{-(x^2+y)} + 2x$	0	0.5	0.3	0.05
6	$\cos(1.5y + x)^2 + 1.4$	1	2	0.9	0.1
7	$4.1x - y^2 + 0.6$	0.6	2.6	3.4	0.2
8	$\frac{1}{1 + x^3y} + 2y$	1.5	2	2.1	0.05
9	$x + \cos \frac{y}{\sqrt{11}}$	2.1	3.1	2.5	0.1
10	$\frac{2xy}{x+4} - 0.4$	3	5	1.7	0.2
11	$2.5x + \cos(y + 0.6)$	1	3	1.5	0.2
12	$x + 2.5y^2 + 2$	1	2	0.9	0.1
13	$2 - \sin(x + y)^2$	2	3	2.3	0.1
14	$\frac{2}{x+2} + x + 1$	0.1	0.5	1.25	0.05
15	$x + \cos \frac{y}{2}$	-2	-1	3	0.1
16	$\sqrt{x^2 + 0.5y^2} + 1$	0	2	2.9	0.2
17	$\sin(x + y) + 1.5$	1.5	2.5	0.5	0.1
18	$\frac{1}{x+16.7} + x + 3$	1.5	2	1.4	0.05
19	$e^{2x} + 0.25y^2$	0	0.5	2.6	0.05
20	$0.4x^2 + y^2$	1	3	1.8	0.2

Указания к выполнению
практической работы № 8

«Численное решение дифференциальных уравнений»

Дано дифференциальное уравнение $y = f'(x)$, промежуток (a, b) , начальное условие $f(a) = c$, шаг h

Решение оформляется в виде таблицы

1. Метод Эйлера

i	x_i	$y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1}$	$\Delta y_i = h(f(x_i; y_i))$
0	a	$y_0 = c$	$\Delta y_0 = h(f(x_0; y_0))$
1	$a+h$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$\Delta y_1 = h(f(x_1; y_1))$
2	$a+2h$	$y_2 = y_1 + \Delta y_1$	$\Delta y_2 = h(f(x_2; y_2))$
3	$a+3h$	$y_3 = y_2 + \Delta y_2$	$\Delta y_3 = h(f(x_3; y_3))$
....		$y_4 =$	
...			
n	b		

2. Метод Рунге-Кутты

i	x_i	$r_1 = hf(x_i; y_i)$	$r_2 = hf(x_i + h/2; y_i + r_1/2)$	$r_3 = hf(x_i + h/2; y_i + r_2/2)$	$r_4 = hf(x_i + h; y_i + r_3)$	y_i
0	a					$y_0 = c$
1	$a+h$					$y_1 = y_0 + 1/6(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4)$
2	$a+2h$					$y_2 = y_1 + 1/6(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4)$
3	$a+3h$					$y_3 = y_2 + 1/6(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4)$
....						
...						
n	b					

Практическая работа №9

«Задача оптимизации функции одной переменной»

1. Найти минимум функции на данном промежутке методом дихотомии.
2. Найти минимум этой функции с помощью Excel
3. Построить график данной функции с помощью Maple, затем схематически в тетради.

№ п/п	$f(x)$	Отрезок
1	$\frac{5x}{2+x^2}$	$[-3; 0]$
2	$-\sqrt{3x-x^2}$	$[0; 3]$
3	$-xe^{-x}$	$[0; 3]$
4	$\frac{\lg^2 x}{x}$	$[0,2; 3]$
5	$\frac{10}{1+2\sin^2 x}$	$[0; 4]$
6	$e^x \cos x$	$[-4; 0]$
7	$x + \frac{2}{x}$	$[0,5; 4]$
8	$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + x + 1}$	$[0; 4]$
9	$\frac{\sqrt{x}}{\log x}$	$[5; 10]$
10	$\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{3}$	$[2; 6]$

№ п/п	$f(x)$	Отрезок
11	$\operatorname{arctg} x + \lg(2+x^2)$	$[-3; 0]$
12	$(x+2)e^{1/x}$	$[0,5; 4]$
13	$\frac{x^3}{1+x^4}$	$[-5; -0,5]$
14	$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$	$[-3; 2]$
15	$3 \cos \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{3}$	$[4; 9]$
16	$\frac{(x-3)(x-7)}{x^2}$	$[2; 7]$
17	$-\frac{3}{\sqrt{x^2+7}}$	$[-2; 4]$
18	$3 \sin 3x - 2 \sin 4x$	$[1; 3]$
19	$e^x + e^{-x}$	$[-3; 2]$
20	$x^2 + \operatorname{arctg} x$	$[-1; 6]$

Практическая работа №10

«Задача оптимизации функции двух переменных»

1. Найти минимум функции двух переменных методом наискорейшего спуска.
2. Найти минимум этой функции с помощью Excel
3. Построить график данной функции с помощью Maple, затем схематически в тетради

№ п/п	$f(x, y)$	Область
1	$3x^2 - xy + 2y^2 - 2x + y$	$x \in [0; 1], y \in [-1; 0]$
2	$-x^2y^3(7 - 2x - y)$	$x \in [0; 3], y \in [2; 5]$
3	$2x^4 + 3y^4 - x^2 - 4xy - y^2$	$x \in [0; 1], y \in [0; 1]$
4	$2xy + \frac{40}{x} + \frac{30}{y}$	$x \in [2; 4], y \in [1; 4]$
5	$\frac{x + 2y - 3}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$	$x \in [0; 1], y \in [0; 1]$
6	$2x^2 + xy + y^2 - 4 \lg x - 8 \lg y$	$x \in [0,1; 1], y \in [0,1; 3]$
7	$\sin x + 2 \cos y + 3 \cos(x + y)$	$x \in [-\frac{\pi}{2}; 0], y \in [\pi; \frac{3\pi}{2}]$
8	$xy \lg(x^2 + 2y^2)$	$x \in [0,1; 1], y \in [0,1; 1]$
9	$\frac{6}{x} + \frac{2x}{y} + y$	$x \in [1; 4], y \in [1; 4]$
10	$x^3 + 2y^3 - 3x^2 - xy - y^2$	$x \in [1; 4], y \in [0; 3]$
11	$-x^3y^2(3 - x - y)$	$x \in [0; 3], y \in [0; 3]$
12	$5x^4 + y^4 - 2x^2 - 6xy - 3y^2$	$x \in [0; 2], y \in [0; 3]$
13	$5xy + \frac{10}{x} + \frac{20}{y}$	$x \in [0; 3], y \in [1; 4]$
14	$\frac{3x + y - 1}{\sqrt{x^2 + 2y^2 + 1}}$	$x \in [-4; 0], y \in [-2; 0]$
15	$x^2 + 2xy + 3y^2 - 2 \ln x - 8 \ln y$	$x \in [0,1; 1,5], y \in [0,1; 1,5]$
16	$2 \sin x + \cos y + \cos(x + y)$	$x \in [-1; -2], y \in [3; 4]$
17	$xy \ln(2x^2 + 3y^2)$	$x \in [0,1; 1], y \in [0,1; 1]$
18	$\frac{2}{x} + \frac{x}{y} + 3y$	$x \in [0; 2], y \in [0; 1]$
19	$3x^3 + y^3 - 5x^2 - 2xy - y^2$	$x \in [1; 2], y \in [1; 2]$
20	$\frac{5}{y} + \frac{y}{x} + 2x$	$x \in [0; 3], y \in [0; 3]$

Указания к выполнению
практической работы № 10

«Задача оптимизации функции двух переменных»

Дано $y=f(x,y)$, $x \in [a, b], y \in [c; d]$

Шаг 1

1. Выберем x_0 и y_0 произвольно, чтобы выполнялось условие $x_0 \in [a, b], y_0 \in [c; d]$
2. Подставим x_0 и y_0 в формулы, где h переменная
$$x_1 = x_0 - h f'_x(x, y) \qquad y_1 = y_0 - h f'_y(x, y)$$
3. Составим функцию $\varphi(h)$ подставив в $f(x, y)$ найденные значения x_1, y_1
4. Найдём экстремум этой функции для этого:
 - 1) Найдём производную $\varphi'(h)$
 - 2) Решим уравнение $\varphi'(h)=0$, найдём $h=$
 - 3) Вычислим $\varphi(h)=$
5. Подставим найденное значение в формулы $x_1 = x_0 - h f'_x(x, y), y_1 = y_0 - h f'_y(x, y)$ Получим значения $x_1=, y_1=$

Шаг 2

1. Подставим x_1 и y_1 в формулы, где h_1 переменная
$$x_2 = x_1 - h_1 f'_x(x, y) \qquad y_2 = y_1 - h_1 f'_y(x, y)$$
2. Повторим действия 3-5 шага 1 получим значения $x_2=, y_2=$

Применение инструментальных средств для численного решения задач.

Прикладной программный пакет Maple.

Maple принадлежит к классу прикладных программных пакетов, объединенных под общим названием Computer Algebra Systems (CAS) - системы компьютерной алгебры. Самым важным отличием Maple от таких пакетов как MathCad, MatLAB, Mathematica, является то, что она была изначально задумана как символьный пакет. Как и любой представитель данного семейства продуктов, Maple ориентирована на решение широкого ряда математических проблем. Она включает в себя большое количество специальных пакетов для решения задач линейной и тензорной алгебры, евклидовой и аналитической геометрии, теории чисел, теории графов, теории вероятностей, математической статистики, комбинаторики, теории групп, численной аппроксимации и линейной оптимизации, задач финансовой математики и многих других.

В основу Maple положен алгоритмический язык высокого уровня, предназначенный для реализации обычного процедурного программирования. Maple-язык "понимает" все стандартные объекты типа циклов (while, for), операторов условного перехода (if-then-else), массивов (array), списков (list), наборов (set), таблиц и т.д. Есть также возможность работы с файлами, что позволяет строить системы, состоящие из множества модулей, подгружая необходимые процедуры в процессе выполнения программы, а также реализовывать ввод и вывод больших объемов данных. Реализованы также все стандартные процедуры обработки строковой информации.

Практические работы предполагают использование встроенных функций Maple, позволяющих решать основные задачи дисциплины "Численные методы".

Решение задач оптимизации

Мощным средством анализа данных Excel является надстройка **Solver (Поиск решения)**. С ее помощью можно определить, при каких значениях указанных влияющих ячеек формула в целевой ячейке принимает нужное значение (минимальное, максимальное или равное какой-либо величине). Для процедуры поиска решения можно задать ограничения, причем не обязательно, чтобы при этом использовались те же влияющие ячейки. Для расчета заданного значения применяются различные математические методы поиска. Вы можете установить режим, в котором полученные значения переменных автоматически заносятся в таблицу. Кроме того, результаты работы программы могут быть оформлены в виде отчета.

Программа Поиск решений (в оригинале Excel Solver) – дополнительная надстройка табличного процессора MS Excel, которая предназначена для

решения определенных систем уравнений, линейных та нелинейных задач оптимизации.

По умолчанию в Excel надстройка Поиск решения отключена. Чтобы активизировать ее в Excel 2007, щелкните значок Кнопка Microsoft Office, щелкните Параметры Excel, а затем выберите категорию Надстройки. В поле Управление выберите значение Надстройки Excel и нажмите кнопку Перейти. В поле Доступные надстройки установите флажок рядом с пунктом Поиск решения и нажмите кнопку ОК.

Параметры средства Поиск решения

Максимальное время - служит для ограничения времени, отпущенного на поиск решения задачи. В этом поле можно ввести время в секундах, не превышающее 32 767 (примерно девять часов); значение 100, используемое по умолчанию, вполне приемлемо для решения большинства простых задач.

Параметры поиска решения

Максимальное время:	100	секунд	OK
Предельное число итераций:	100		Отмена
Относительная погрешность:	0,000001		Загрузить модель...
Допустимое отклонение:	5	%	Сохранить модель...
Сходимость:	0,0001		Справка

Линейная модель Автоматическое масштабирование
 Неотрицательные значения Показывать результаты итераций

Оценки	Разности	Метод поиска
<input checked="" type="radio"/> линейная	<input checked="" type="radio"/> прямые	<input checked="" type="radio"/> Ньютона
<input type="radio"/> квадратичная	<input type="radio"/> центральные	<input type="radio"/> сопряженных градиентов

Предельное число итераций - управляет временем решения задачи путем ограничения числа вычислительных циклов (итераций).

Относительная погрешность - определяет точность вычислений. Чем меньше значение этого параметра, тем выше точность вычислений.

Допустимое отклонение - предназначен для задания допуска на отклонение от оптимального решения, если множество значений влияющей ячейки ограничено множеством целых чисел. Чем больше значение допуска, тем меньше времени требуется на поиск решения.

Сходимость - применяется только к нелинейным задачам. Когда относительное изменение значения в целевой ячейке за последние пять итераций становится меньше числа, указанного в поле Сходимость, поиск прекращается.

Линейная модель - служит для ускорения поиска решения путем применения к задаче оптимизации линейной модели. Нелинейные модели предполагают использование нелинейных функций, фактора роста и экспоненциального сглаживания, что замедляет вычисления.

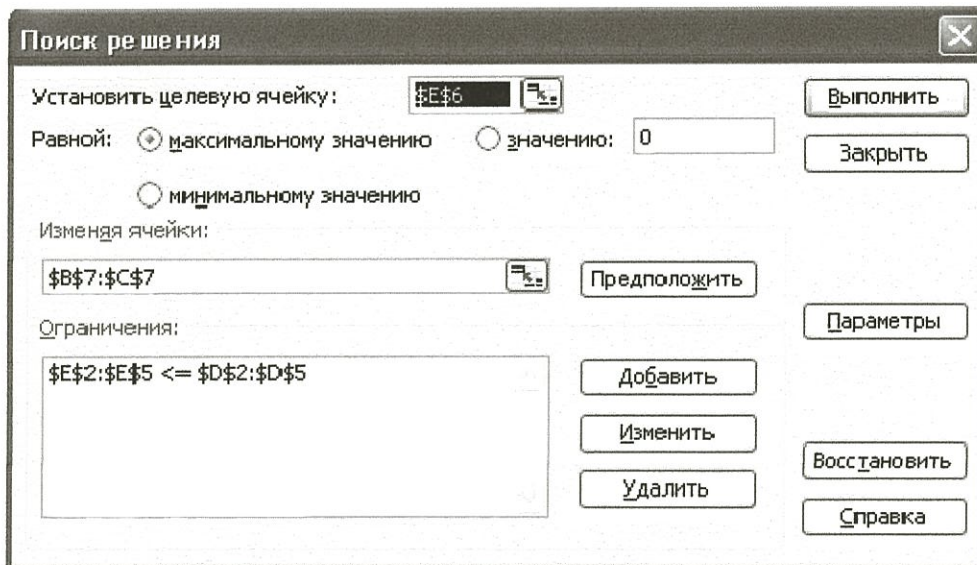
Практическая работа № 8

Найдем численное решение задачи Коши.

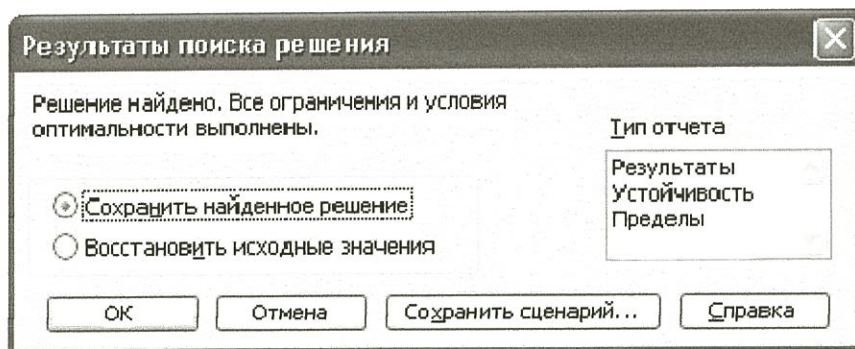
```
restart; Ordev=6;  
eq:=diff(f(x,y));  
cond:=y(a)=c, D(y)(a)=b;  
de:=dsolve({eq,cond},y(x),numeric);
```

Практическая работа № 9, № 10

1. Выделите целевую ячейку и введите в неё формулу задающую функцию - В **Excel 2007** *Данные/Анализ/Поиск решения*;
2. Установите переключатели Equal To (Равной), задающие значение целевой ячейки, — Max (максимальному значению), Min (минимальному значению) или Value of (значению). В последнем случае введите значение в поле справа.
3. Укажите в поле By Changing Cells (Изменяя ячейки), в каких ячейках программа должна изменять значения в поисках оптимального результата.
4. Создайте ограничения в списке Subject to the Constraints (Ограничения). Для этого щелкните на кнопке Add (Добавить) и в диалоговом окне Add Constraint (Добавление ограничения) определите ограничение.



5. Щелкните на кнопке на кнопке Options (Параметры), и в появившемся окне установите переключатель Неотрицательные значения (если переменные должны быть позитивными числами), Линейная модель (если задача, которую вы решаете, относится к линейным моделям)
6. Щелкнув на кнопке Solver (Выполнить), запустите процесс поиска решения.



7. Когда появится диалоговое окно Solver Results (Результаты поиска решения), выберите переключатель Keep Solve Solution (Сохранить найденное решение) или Restore Original Values (Восстановить исходные значения).

8. Щелкните на кнопке ОК.

Литература

Основная литература

1. Бахвалов Н.С. Численные методы - СПб.: Лаборатория базовых знаний, 2010
2. Вержбицкий В.М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. – М.:ООО «Издательский дом ОНИКС 21век», 2007
3. Лапчик М.П., Рагулина М.И., Хеннер Е.К. Элементы численных методов. – Издательский центр «Академия», 2009

Дополнительная литература.

1. Власов В.Г. «Конспект лекций по высшей математике» - М.: Айрис, 1996
2. Дадаян А.А. «Сборник задач по математике» - М: Форум – Инфа - М, 2005
3. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М. Наука, 1963.
4. Курош А.Г. «Курс высшей алгебры» - М: Наука, 1995
5. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М. Наука, 1990.
6. Мозговая К.В. «Вычислительная математика» - М, Экзамен, 2005
7. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М. Наука, 1987.
8. Шапкин А.С. «Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию» - М: Дашков и К^о, 2005

Информационное обеспечение

1. Бахвалов Н.С. Численные методы - СПб.: Лаборатория базовых знаний, 2017
2. Вержбицкий В.М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. – М.:ООО «Издательский дом ОНИКС 21век», 2017
3. Дадаян А.А. «Сборник задач по математике» - М: Форум – Инфа - М, 2010
4. Лапчик М.П., Рагулина М.И., Хеннер Е.К. Элементы численных методов. – Издательский центр «Академия», 2009